ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Лектор:

к.ф.-м.н. Алимгазинова Назгуль Шакаримовна

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

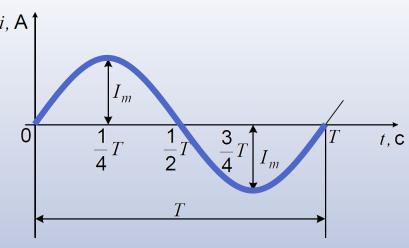
Переменным током называют ток, который изменяется во времени по величине и направлению.

Переменный ток может быть однофазным и трёхфазным.

Переменный однофазный синусоидальный ток

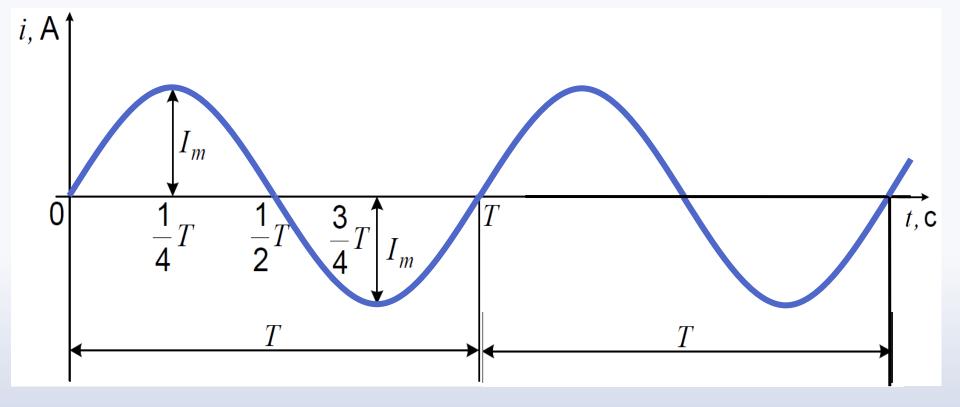
Однофазный синусоидальный ток представляет собой переменный ток, изменяющийся во времени по периодическому, синусоидальному закону.

$$i = I_m \sin(t + kT),$$



Волновая диаграмма однофазного синусоидального тока

где i – мгновенное значение тока, m. e. значение тока в данный момент времени; I_m – максимальное значение тока, называемое амплитудой; T – период колебания тока, τ . e. интервал времени в секундах (c), за которое совершается одно полное колебание; k – любое целое число.



$$f = \frac{1}{T}$$

Частота – это число периодов колебаний какого либо процесса (тока, напряжения и др.) за одну секунду. Измеряется в герцах (Γ ц), 1 Γ ц = 1/с.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Круговая (угловая, циклическая) частота w, рад/с, равна числу
периодов колебания тока
(напряжения) за 2р секунд:

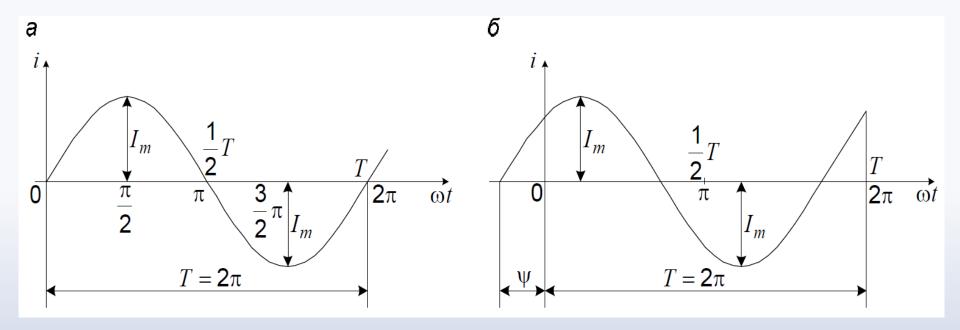
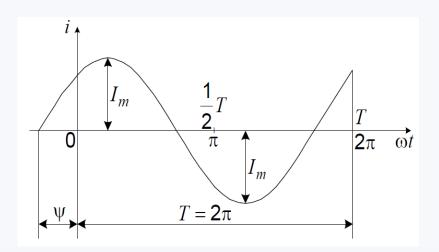


График синусоидального тока в виде волновой диаграммы

$$i=I_m \sin \omega t$$
 — для рис. а $(\psi=0);$ $i=I_m \sin(\omega t+\psi)$ — для рис. б $(\psi\neq0).$



$$\frac{T}{2\pi \omega t} \qquad i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

Анализируя выражения представленных на рисунках выше функций, вводим понятия:

- 1) **фаза (аргумент)** величина ($\omega t + \psi$). Фаза характеризует состояние колебания, т. е. она даёт возможность определить численное значение изменяющейся величины в данный момент времени t;
- 2) значение фазы при t = 0, когда $\omega t + \psi = \omega * 0 + \psi = \psi$, называется **начальной** фазой и обозначается ψ .

При радианном измерении аргумента синуса ωt в течение времени T фаза тока увеличивается на 2π .

Круговая частота ω показывает, на сколько радиан изменится фаза тока за 1 секунду.

Любая синусоидально (гармонически) изменяющаяся функция однозначно определяется тремя величинами: амплитудой, угловой частотой (частотой, периодом) и начальной фазой.

Амплитуда Угловая частота $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ Начальная фаза

ХАРАКТЕРИСТИКИ СИНУСОИДАЛЬНЫХВЕЛИЧИН

Действующее значение синусоидально изменяющейся величины переменного тока и напряжения

Действующее значение I синусоидального тока $i = I_m \sin(wt)$ численно равно значению такого постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет на сопротивлении R такое же количество теплоты, что и синусоидальный ток.

Действующее значение тока ещё называют эффективным или среднеквадратичным.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} i^{2} dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} I_{m}^{2} \sin^{2} \omega t d\omega t} = \frac{I_{m}}{\sqrt{2}} = 0,707 I_{m}.$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m$$
.

Среднее значение синусоидально изменяющейся величины переменного тока и напряжения

Под **средним значением** синусоидального переменного тока понимают его среднее значение за **положительный полупериод**:

$$I_{cp} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{0}^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} I_{m} \sin \omega t \, d\omega t = \frac{2}{\pi} I_{m} = 0,638 I_{m}.$$

$$U_{cp} = \frac{2}{\pi}U_m = 0,638 \ U_m.$$

Коэффициенты амплитуды и формы

Коэффициент амплитуды представляет собой отношение амплитуды периодически изменяющейся функции к её действующему значению

$$K_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} = 1,41.$$

Коэффициент формы – это отношение действующего значения периодически изменяющейся функции к её среднему значению за полпериода

$$K_{\phi} = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2I_m}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЕРЕМЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА



математическим уравнением (через тригонометрические функции)



вращающимся вектором



волновой диаграммой

Представление переменного синусоидального тока математическим уравнением

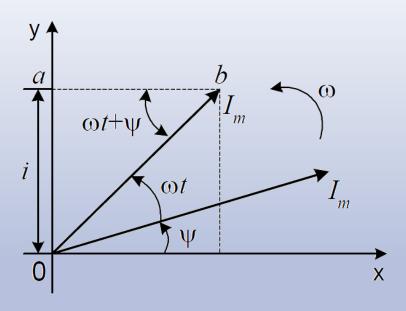
$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

Представление переменного синусоидального тока вращающимся вектором. Векторные диаграммы

Пусть в прямоугольной системе координат х и у имеется вектор длиной I_m , расположенный под углом ψ к горизонтальной оси.

Заставим этот вектор вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью ω . Тогда за время t он повернётся на угол ωt .

Проекцию вращающегося вектора на вертикальную ось обозначим через функцию $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$. Функция i представляет собой мгновенное значение тока.



Вращающийся вектор

Изображение тока с помощью вектора называется его **векторной диаграммой**.

Длина вектора может быть равна амплитудному значению I_m , либо действительному значению I. Обычно вектор при этом показывается не в произвольный момент времени t, а в начальный, когда t=0, т. е. угол наклона вектора к горизонтальной оси равен начальной фазе.

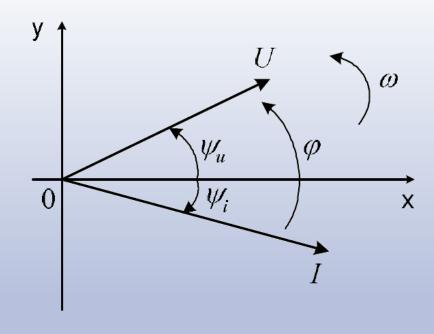
Построим векторную диаграмму двух векторов – тока и напряжения. Длины векторов равны действующим значениям тока и напряжения, углы их наклона к горизонтальной оси – начальным фазам, а угол между векторами, равный разности начальных фаз ψ_u и ψ_i , определяет сдвиг фаз ϕ между напряжением и током:

$$\phi = \psi_{i} - \psi_{i}$$

На диаграмме стрелка, показывающая угол ф, всегда изображается в положительном направлении – против часовой стрелки.

Векторная диаграмма даёт наглядное представление об отставании одних величин и опережении других.

Если начальные фазы U и I (ψ_u и ψ_i) равны нулю, то можно изображать векторную диаграмму без осей и располагать её как удобно.

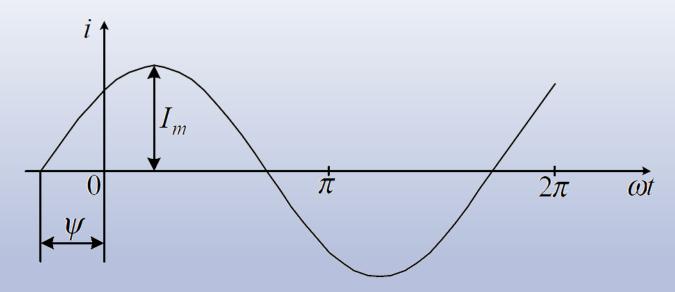


Векторная диаграмма напряжения и тока

Представление переменного синусоидального тока волновой диаграммой

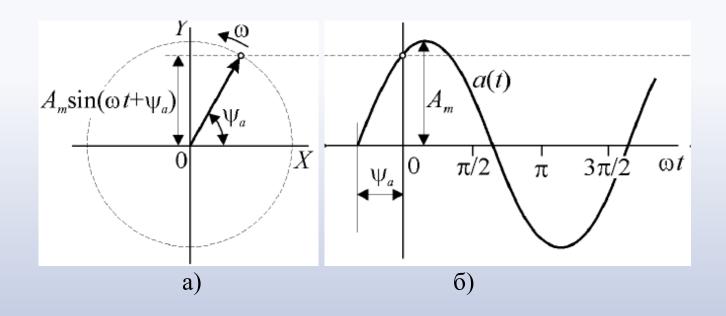
График синусоидального тока можно изобразить в виде волновой диаграммы.

На волновой диаграмме указана начальная фаза, которая определяется углом ψ , измеряемым от ближайшей к началу координат точки перехода синусоиды через ноль до точки начала координат. Начальная фаза ψ положительна в тех случаях, когда начало синусоиды смещено от точки ноль (начало координат) влево и наоборот – отрицательна, когда смещена вправо.



Волновая диаграмма синусоидального тока

Примеры перехода от одной формы задания к другой:



ЗАКОНЫ КИРХГОФА В ЦЕПЯХ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА И МЕТОДЫ РАСЧЁТА ЭТИХ ЦЕПЕЙ

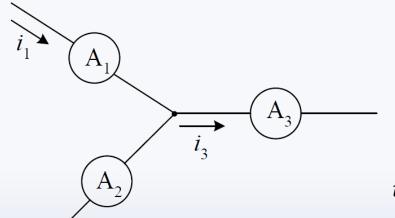
Первый закон Кирхгофа: в любой момент времени алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю

$$\sum_{k=1}^{m} i_k(t) = 0$$

Второй закон Кирхгофа: в любой момент времени в замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжений на всех остальных элементах контура

 $\sum_{k=1}^{n} e_{k}(t) = \sum_{k=1}^{n} u_{k}(t)$

Применение метода расчёта непосредственно над синусоидальными функциями



$$i_1 = 8 \sin(\omega t + 30^\circ),$$

 $i_2 = 6 \sin(\omega t + 120^\circ).$

1-й закон Кирхгофа $i_1+i_2-i_3=0$,

$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$i_3 = 8 \sin(\omega t + 30^\circ) + 6 \sin(\omega t + 120^\circ) = I_{3m} \sin(\omega t + \psi_3)$$

Сумма двух синусоид одинаковой частоты есть тоже синусоида той же частоты. Её амплитуда и начальная фаза находятся по формулам:

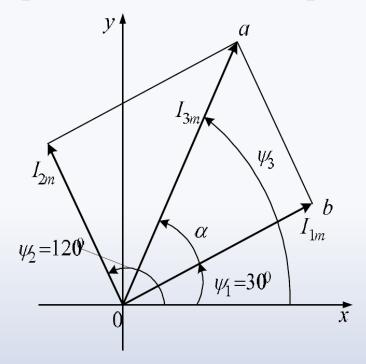
$$I_{3m} = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2 \cdot I_{1m} \cdot I_{2m} \cdot \cos(\psi_1 - \psi_2)} =$$

$$= \sqrt{8^2 + 6^2 + 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos(30^\circ - 120^\circ)} = 10 \text{ A},$$

$$tg\psi_3 = \frac{I_{1m} \sin \psi_1 + I_{2m} \sin \psi_2}{I_{1m} \cos \psi_1 + I_{2m} \cos \psi_2} = \frac{8 \cdot \sin 30^\circ + 6 \cdot \sin 120^\circ}{8 \cdot \cos 30^\circ + 6 \cdot \cos 120^\circ} = 2,341,$$

$$\psi_3 = arctg \, 2,341 = 66,87^{\circ}.$$
 $i_3 = 10 sin(\omega t + 66,87^{\circ}).$

Применение метода расчёта с помощью векторных диаграмм



Векторная диаграмма токов

На примере, в соответствии с 1-м законом Кирхгофа в векторной форме для цепи, запишем:

 $\bar{I}_{3m} = \bar{I}_{1m} + \bar{I}_{2m} \,.$

Построим в прямоугольной системе координат сумму векторов \bar{I}_{1m} и \bar{I}_{2m} .

Необходимо определить \bar{I}_{3m} .

Так как треугольник oab – прямоугольный, а сторона ab равна длине вектора \bar{I}_{2m} , то в этом треугольнике:

$$I_{3m} = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ A}.$$

Начальная фаза ψ_3 тока I_{3m} равна углу наклона вектора \bar{I}_{3m} к горизонтальной оси

$$\psi_3 = \psi_1 + \alpha = \psi_1 + arctg \frac{I_{2m}}{I_{1m}} = 30^\circ + arctg \frac{6}{8} = 30^\circ + 36,87^\circ = 66,87^\circ.$$

Определяем показания аргументов. Известно, что приборы электромагнитной системы показывают действующие значения токов и напряжений. Поэтому

$$I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{8}{1,41} = 5,66 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{1,41} = 4,24 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{I_{3m}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{1,41} = 7,07 \text{ A}.$$

Проанализировав численные значения токов I_1 , I_2 и I_3 , обращаем внимание на то, что

$$I_1 + I_2 \neq I_3$$
,
5,66 + 4,24 \neq 7,07.

Это не ошибка. Надо знать, что в цепях синусоидального тока для показаний приборов законы Кирхгофа не справедливы.

В итоге можно складывать только мгновенные значения токов (синусоидальные функции времени) и векторы. Однако складывать численные значения токов и напряжений, а также показания приборов нельзя.

КОМПЛЕКСНЫЙ ВИД ПЕРЕМЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

$$\dot{A} = p + jq$$

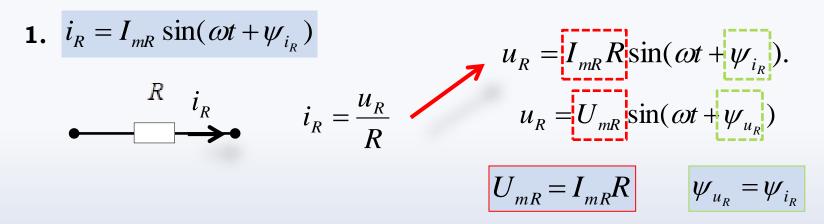
$$|A| = \sqrt{p^2 + q^2}, \qquad \psi_a = arctg\left(\frac{q}{p}\right).$$

 $e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi$ называется оператором поворота

$$\begin{cases} 1 = e^{j0}; \\ j = e^{j\frac{\pi}{2}}; \\ -1 = e^{j\pi}; \\ -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

ЗАКОНЫ ОМА И КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Закон Ома



На участке цепи, содержащем резистивный элемент, при протекании переменного тока, сдвига фаз между током и напряжением не будет.

$$\dot{U}_{R} = U_{mR}e^{j\psi_{u_R}} \qquad \dot{I}_{R} = I_{mR}e^{j\psi_{i_R}}$$

Закон Ома в комплексном виде

$$\dot{U}_R = \dot{I}_R \cdot R.$$

Падение напряжения на резистивном элементе

2.
$$L$$
 i_L

$$i_L = I_{mL} \sin(\omega t + \psi_{i_L}).$$

$$u_L = -e_L, \qquad e_L = -L \frac{di_L}{dt} \longrightarrow u_L = I_{mL} \omega L \cos(\omega t + \psi_{i_L}).$$

$$u_{L} = I_{mL}\omega L \sin(\omega t + \psi_{i_{L}} + \frac{\pi}{2}).$$

$$u_{L} = U_{mL} \sin(\omega t + \psi_{u_{L}})$$

$$U_{mL} = I_{mL}\omega L$$
,

$$\psi_{u_L} = \psi_{i_L} + \frac{\pi}{2}$$

$$X_L = \omega L$$

 $X_L = \omega L$ - Индуктивное сопротивление

На участке цепи, содержащем емкостной элемент, при протекании переменного тока, между током и напряжением будет сдвиг фаз. Напряжение на емкостном элементе отстает по фазе от тока на угол равный $\frac{\pi}{2}$

$$\dot{U}_{L} = U_{mL}e^{j\psi_{uL}}, \qquad \dot{I}_{L} = I_{mL}e^{j\psi_{iL}}, \qquad \dot{X}_{L} = j\omega L = jX_{L}.$$

Закон Ома в комплексном виде

$$\dot{U}_L = \dot{I}_L \cdot \dot{X}_L = j X_L \cdot \dot{I}_L.$$
 Падение напряжения на индуктивном

на индуктивном элементе

3.
$$U_{C} = U_{mC} \sin(\omega t + \psi_{u_{C}}).$$

$$i_{C} = \frac{dq}{dt}, \quad q = u_{C}C. \implies i_{C} = U_{mC}\omega C \cos(\omega t + \psi_{u_{C}}).$$

$$i_{C} = U_{mC}\omega C \sin(\omega t + \psi_{u_{C}} + \frac{\pi}{2})$$

$$i_{C} = I_{mC} \sin(\omega t + \psi_{i_{C}})$$

$$\psi_{i_{C}} = \psi_{u_{C}} + \frac{\pi}{2}$$

$$\psi_{i_{C}} = \psi_{u_{C}} + \frac{\pi}{2}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$
 - емкостное сопротивление

На участке цепи, содержащем емкостной элемент, при протекании переменного тока, между током и напряжением будет сдвиг фаз. Напряжение на емкостном элементе опережает по фазе ток на угол равный $\frac{\pi}{2}$

$$\dot{U}_{C} = U_{mC}e^{j\psi_{uC}}, \qquad \dot{I}_{C} = I_{mC}e^{j\psi_{iC}}, \qquad \dot{X}_{C} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_{C}.$$

Закон Ома в комплексном виде

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C \cdot \dot{X}_C = -j X_C \cdot \dot{I}_C$$
 Падение напряжения

Падение напряжения на емкостном элементе

Законы Кирхгофа

I закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма сходящихся в узле всех токов, представленных в комплексном виде, равна нулю:

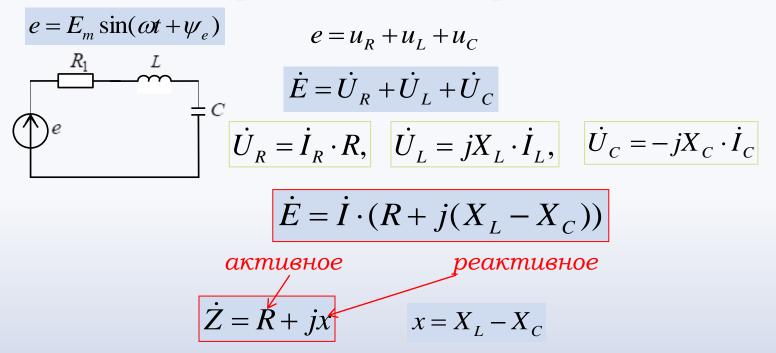
$$\sum_{k} \dot{I}_{k} = 0$$

II закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма падений напряжений на всех элементах замкнутого участка цепи (контура), представленных в комплексном виде, равна алгебраической сумме всех комплексных ЭДС данного участка цепи (контура):

$$\sum_{k} \dot{U}_{k} = \sum_{m} \dot{E}_{m}$$

Полное сопротивление неразветвленной цепи



Полное комплексное conpomuвление цепи

Если составляющие комплексного сопротивления изобразить векторами на комплексной плоскости, то активное, реактивное и полное сопротивления образуют прямоугольный треугольник, называемый **треугольником** сопротивлений.

$$\dot{Z} = \sqrt{R^2 + x^2} \qquad \varphi = arctg \frac{x}{R}$$

Сдвиг фаз между током и напряжением на участке цепи определяется соотношением реактивного и активного сопротивлений.

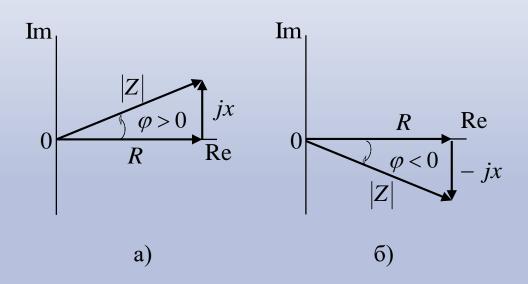
При отсутствии активной составляющей фазовый сдвиг составляет:

- \checkmark +90° при индуктивном характере;
- ✓ -90^{0} при емкостном характере реактивного сопротивления.

Наличие активной составляющей определяет для фазового смещения сектора:

- ✓ $0 < \varphi < 90^{\circ}$ при активно-индуктивном характере комплексного сопротивления (рисунок 7.2, а);
- ✓ $0 > \varphi > 90^{\circ}$ при активно-емкостном характере (рисунок 7.2, б);.

При отсутствии реактивной составляющей комплексного сопротивления сдвиг фаз между током и напряжением отсутствует, т.е. $\varphi = 0$.



Треугольник сопротивлений

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}} \qquad \qquad \dot{E} = E_m e^{j\psi_e}$$

$$\dot{Z} = Z_m e^{j\varphi}$$

$$\dot{I} = \frac{E_m e^{j\psi_e}}{Z_m e^{j\varphi}} = \frac{E_m}{Z_m} e^{j(\psi_e - \varphi)}$$

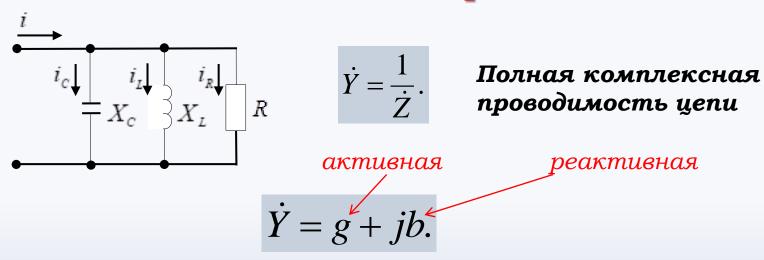
$$\dot{I} = I_m e^{j\psi_i}$$

$$\psi_i = \psi_e - \varphi$$

Начальная фаза сопротивления численно равна сдвигу фаз между напряжением и током в цепи

$$\varphi = \psi_e - \psi_i$$

Полная комплексная проводимость цепи



Вектора комплексной проводимости и её составляющих образуют на комплексной плоскости прямоугольный треугольник, называемый **треугольником проводимостей**

$$\dot{Y} = \sqrt{g^2 + b^2}$$

$$\varphi = arctg \frac{b}{g}$$

Если цепь активно-индуктивная

$$\dot{Z} = R + jX_L,$$

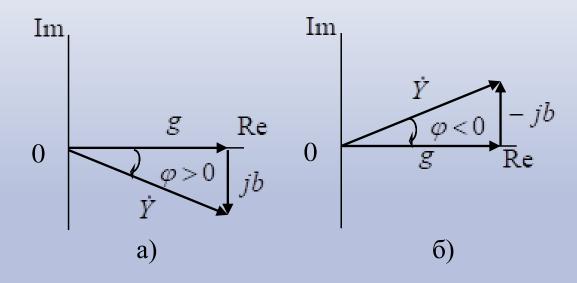
$$\dot{Y} = \frac{1}{R + jX_L} = \frac{R - jX_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{\left|Z\right|^2} - j\frac{X_L}{\left|Z\right|^2} = g - jb_L,$$

Активная проводимость $g = \frac{R}{|Z|^2}$

$$g = \frac{R}{\left|Z\right|^2}$$

Реактивная индуктивная проводимость $b_L = -\frac{X_L}{|Z|^2}$

$$b_L = -\frac{X_L}{\left|Z\right|^2}$$



Если цепь активно-емкостная $\dot{Z} = R - jX_C$,

$$\dot{Z} = R - jX_C,$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{R - jX_C} = \frac{R + jX_C}{R^2 + X_C^2} = \frac{R}{|Z|^2} + j\frac{X_C}{|Z|^2} = g + jb_C,$$

Активная проводимость $g = \frac{\kappa}{|Z|^2}$

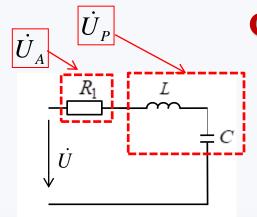
$$g = \frac{R}{\left|Z\right|^2}$$

Pеактивная емкостная проводимость $b_C = \frac{X_C}{|Z|^2}$

$$b_C = \frac{X_C}{\left|Z\right|^2}$$

Мнимая часть полной комплексной проводимости положительная для емкостной цепи и отрицательна для индуктивной цепи

АКТИВНЫЕ И РЕАКТИВНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ НАПРЯЖЕНИЯ



$$\dot{U} = \dot{I} \cdot \dot{Z} = \dot{I} \cdot (R + jx) = \dot{I} \cdot R + \dot{I} \cdot jx = \dot{U}_A + \dot{U}_P$$

Комплексное активное напряжение

$$\dot{U}_A = \dot{I}R$$

Комплексное реактивное напряжение

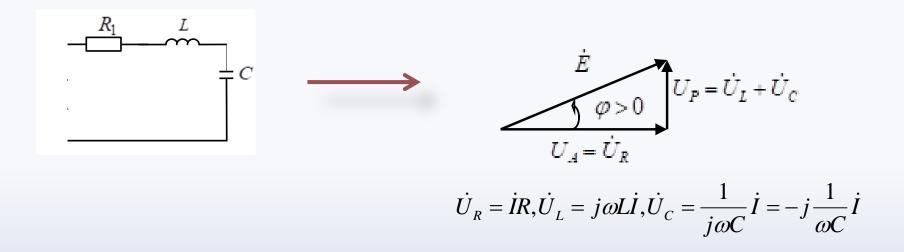
$$\dot{U}_P = \dot{I} \cdot jx$$

Активное напряжение соответствует напряжению на активном сопротивлении, а **реактивное** – на реактивном сопротивлении.

$$\dot{U} = U_A + jU_P;$$
 $U_A = U\cos\varphi; U_P = U\sin\varphi;$

$$U = \sqrt{U_A^2 + U_P^2}; \ \varphi = arctg \frac{U_P}{U_A}$$

Активное напряжение может быть только положительным, а знак реактивного напряжения определяется знаком фазового сдвига.



Вектор напряжения вместе с активной и реактивной составляющими на комплексной плоскости образуют прямоугольный треугольник, называемый **треугольником** напряжений

ЭНЕРГИЯ И МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Энергии магнитного и электрического полей

Активная мощность характеризует среднюю за период скорость поступления энергии в двухполюсник:

$$P = UI\cos(\varphi)$$
.

$$W_{M} = \frac{LI_{m}^{2}}{2};$$

$$W_{3} = \frac{CU_{m}^{2}}{2},$$

Если P > 0 - двухполюсник, потребляет энергию; P < 0 - двухполюсник, отдает энергию остальной части цепи. Единица измерения [Вт].

Реактивная мощность цепи характеризует процессы обмена энергией между цепью и источником, и численно равна максимальной скорости запасения энергии в цепи

$$Q = UI \sin(\varphi)$$
.

Если Q > 0 - энергия запасается в магнитном поле цепи; Q < 0 - энергия запасается в электрическом поле цепи; Q = 0 - в цепи отсутствует обмен энергией с источником. Единица измерения [BAp].

Реактивные мощности на индуктивном и емкостном элементах

$$Q_{L} = I^{2}X_{L} = I^{2} \cdot \omega L$$

$$Q_{C} = I^{2}X_{C} = I^{2} \cdot \frac{1}{\omega C}$$

$$Q = Q_L - Q_C = I^2(X_L - X_C) = I^2 \cdot x$$

Полная мощность есть максимально возможное значение активной мощность при $\varphi = 0$

$$S = UI$$
.

Полной мощностью S называется величина, равная произведению действующих значений тока и напряжения на зажимах цепи. Единица измерения [BA].

 $S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \qquad \dot{S} = P + jQ.$

Прямоугольный треугольник образуемый вектором полной мощности вместе с активной и реактивной составляющими на комплексной плоскости называется **треугольником мощностей**.

Коэффициент мощности

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{P}{S}$$

Для анализа количественных и фазовых соотношений величин на переменном токе на комплексной плоскости строят векторы, соответствующие режиму работы электрической цепи. Такая совокупность векторов называется векторной диаграммой.

Символический метод

Этапы применения символического метода:

- 1. Определяем топологические параметры цепи: количество узлов, ветвей, контуров.
- 2. Представляем все величины и параметры цепи комплексными числами.
- 3. Составляем комплексную схему замещения электрической цепи, на которой все данные указаны в комплексной форме. Указываем положительное направление токов в ветвях цепи.
- 4. Определяем искомые величин любым методом расчета, известным из теории цепей постоянного тока.
- 5. Преобразовываем полученные комплексные величины в форму представления их синусоидальными функциями времени.